„Beweisgang": Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>geschlossener</u> Weg in U, also

$$\gamma(a) = \gamma(b) \ \underline{\text{und}} \ \gamma(t) \in U \ \forall t$$

$$\Longrightarrow : \int_\gamma f(z)\,dz \underset{\text{Def}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{\frac{dF}{dz}(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)}_{= \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t) \text{ nach Prop. 22.3.1 !}}\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)\,dt$$

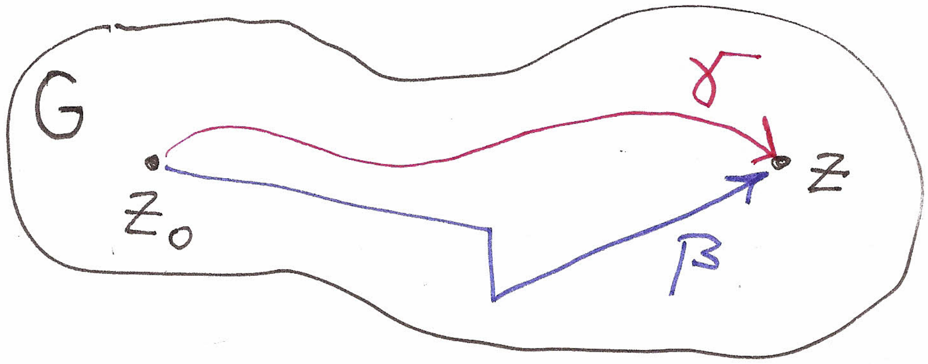
$$\xrightarrow[\text{satz}]{\text{Haupt-}} \int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

$\square$

$$\boxed{\text{Wie steht es mit der Umkehrung?}}$$

allgemeine Idee zur Konstruktion einer Stammfunktion zu

$f : G\,(\text{offen}) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig:



fixiere einen „Basispunkt" $z_0 \in G$;

zu $z \in G$ wähle einen

$$\boxed{\text{Weg } \gamma \text{ von } z_0 \text{ nach } z \text{ in } G}.$$

Damit das geht, muss G ein $\boxed{\text{Gebiet}}$ sein.

Setze dann
$$\boxed{F(z) := \int_\gamma f(w)\, dw}$$

Unabhängigkeit vom Weg ?? !

Verschwinden die Umlaufintegrale von f,

so gilt offenbar

$$\int_\gamma f(w)\,dw = \int_\beta f(w)\,dw.$$

Zeige nun : $\boxed{\frac{dF}{dz}(z) = f(z),\ z \in G.}$

Das ist nicht ganz einfach ! $\Longrightarrow$
($\to$ p. 50[a])

Satz 22.3.3 : Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet

und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig mit

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für geschlossene Wege γ in G. Dann

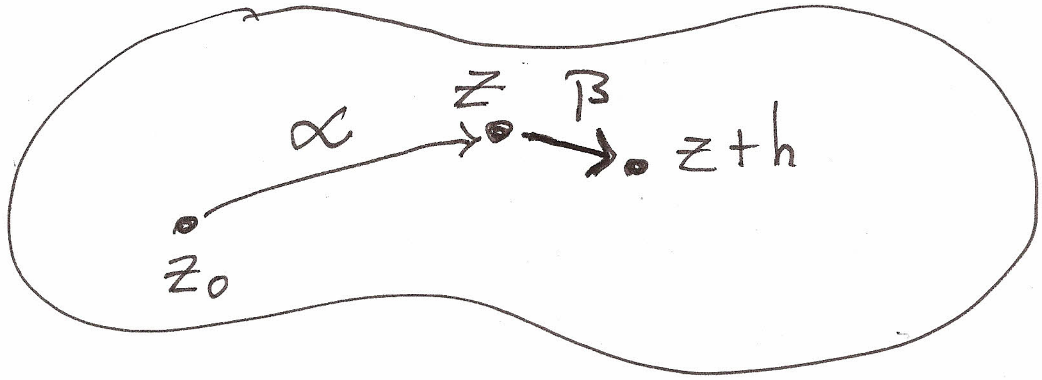
hat f auf G eine Stammfunktion F.

Bem + Bsple:

o) Tatsächlich ist f nicht nur stetig:

Beh : $\frac{d}{dz} F(z) = f(z)$

Bew :



$$\frac{1}{h}\left[F(z+h) - F(z)\right] - f(z) =$$

$$\frac{1}{h}\int_\beta f(w)\,dw - f(z)$$

$$\left(\beta(t) := z + th,\ 0 \le t \le 1\right)$$

$$= \int_0^1 f(z+th)\,dt - f(z)$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Es stellt sich heraus, dass f eine <u>holomorphe</u> Funktion sein muss.

1) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) := re^{it}$ mit einem $r > 0$. Die Menge $G := \mathbb{C} - \{0\}$ ist ein Gebiet und $f(z) = 1/z$ dort sicher stetig.

<u>Aber</u>: $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$

$\Longrightarrow$ $\nexists$ Stammfunktion F zu f auf $\mathbb{C} - \{0\}$

2) $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, $f(z) := z^n \Longrightarrow$

$\displaystyle\int_\beta z^n \, dz = 0$ für jeden <u>ge-schlossenen</u> Weg im Definitionsbereich von f

Kapitel 23

Der Integralsatz und die Integralformel von Cauchy

(= Zentrum der Funktionentheorie)

Schlüsselaussagen:

z.B. Kreisscheibe

$f: G$ (= einfaches Gebiet) $\to \mathbb{C}$ holomorph

$\Longrightarrow$
1.) alle Umlaufintegrale sind 0 ($\Rightarrow \exists$ Stammfkt)
2.) f beliebig oft $\mathbb{C}$ - diff'bar
"
3.) Taylor - Entwicklung
"

23.1 Der Cauchy Integralsatz

besagt, dass für holomorphe Funktionen $f: G \to \mathbb{C}$ auf $\boxed{\text{einfachen}}$ Gebieten G die Frage nach der Existenz von Stammfkten. positiv beantwortet werden kann.

M.a.W.: Im holomorphen Fall hängt die Existenz einer Stammfunktion nur von der Gestalt des Definitionsbereiches ab.

Definition 23.1.1: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (= offen und zusammenhängend). G heißt einfach zusammenhängend,

falls jeder

- geschlossene $(\gamma(a) = \gamma(b))$

Polygonzug $\gamma : [a,b] \longrightarrow G$

ohne Doppelpunkte (d.h. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$)

nur Punkte von G umschließt

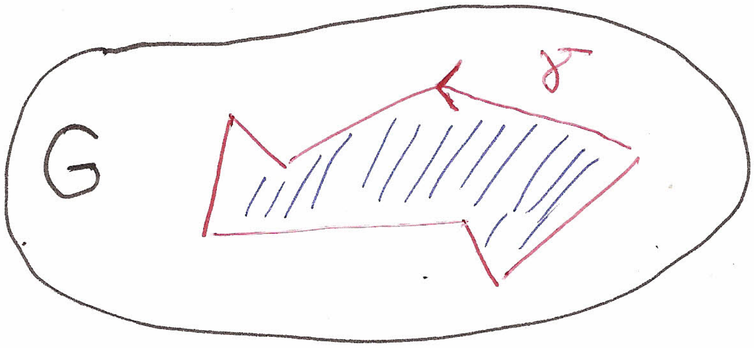
Bem: 1.)

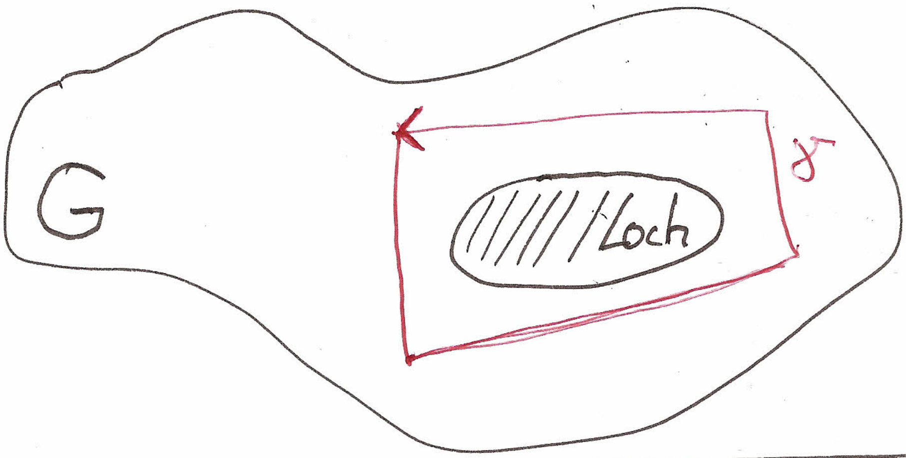
„doppelpunktfrei": kein Punkt wird zweimal durchlaufen

2.) „Polygonzug": γ besteht aus einer Aneinanderreihung von Strecken.

3.) „umschließen": anschaulich klar !

Vorstellung: G hat keine Löcher !



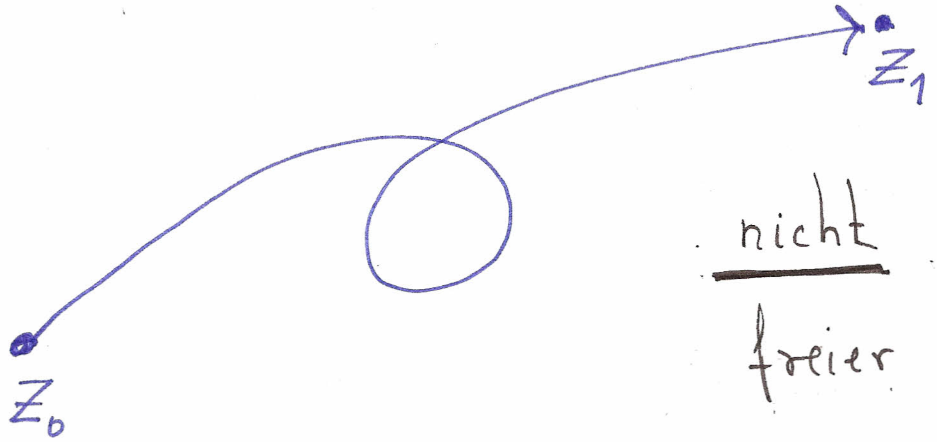


γ umschließt hier Punkte $\notin G$!

Konvention für das Folgende:

a) alle geschlossenen Kurven sollen doppelpunktfrei sein !

b) wir benutzen das Wort „doppelpunktfrei" auch für beliebige Integrationswege



nicht doppelpunktfreier Weg von z_0 nach z_1

Beispiele:

1.) Die Einheitskreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

ist einfach zusammenhängend.

2.) $\mathbb{C} - \{0\}$ nicht.

Mit der Konvention von eben gilt nun

Satz 23.1.1 : (Cauchy Integralsatz)

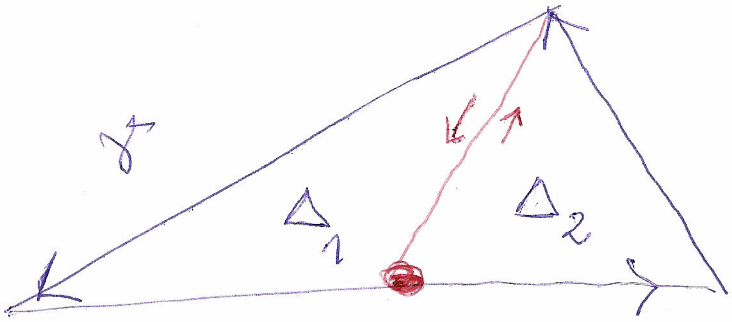
Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammen-hängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Beweisschritte:

1.) γ = Parametrisierung eines Dreiecks in G



Zerlege

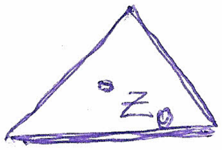
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$ und

unterteile Δ_1, Δ_2 weiter $\Longrightarrow$:

zeige $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für beliebig

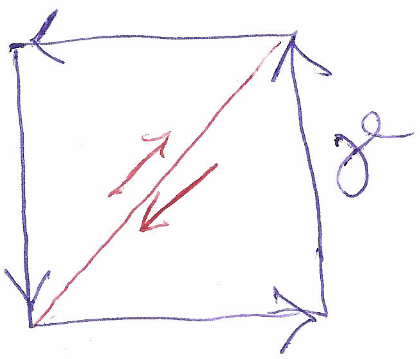
kleine Wege γ (= Rand eines Dreiecks)

$$f(z) \approx \underbrace{f'(z_0)(z-z_0) + f(z_0)}_{\text{hat eine Stammfkt}}$$

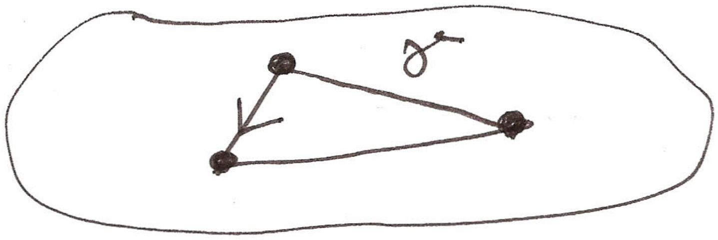


also: $\int_\gamma \big(f'(z_0)(z-z_0) + f(z_0)\big)\,dz = 0$

2.) γ = geschlossener Polygonzug



Reduktion auf "Dreiecke"



2.) γ = geschlossener Polygonzug

3.) geschlossene Integrationswege werden durch Polygonzüge approximiert.

$\square$

Bemerkungen:

1.)

$$\boxed{\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \gamma(t) := re^{it},\ t \in [0, 2\pi], \quad G := \mathbb{C} - \{0\}}$$

zeigt – wie bereits früher bemerkt – die Notwendigkeit der Bedingung an G!